

Problème1

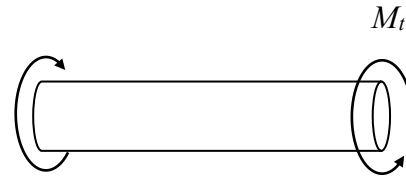
1. Schéma et critère

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \tau_{max} \\ \sigma_2 &= 0 \\ \sigma_3 &= -\tau_{max}\end{aligned}$$

Critère de von Mises (torsion pure)

$$\sigma_g = \sqrt{3}\tau_{max}$$

$$\text{Coefficient de sécurité } n = \frac{\sigma_{et}}{\sigma_g}$$



2. Contrainte de cisaillement en torsion pure

Couple de torsion

$$P = \omega M_t = 2\pi \frac{1500}{60} M_t = 50\pi M_t$$

Moment d'inertie polaire

$$I_p = \frac{\pi D^4}{32}$$

Contrainte de cisaillement

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{D/2 M_t}{I_p} = \frac{16 P}{\omega \pi D^3}$$

3. Calcul du diamètre de l'arbre

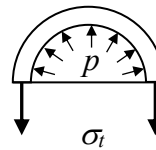
$$D = \sqrt[3]{\frac{16 P}{\omega \pi \tau_{max}}} = \sqrt[3]{\frac{16 P}{\omega \pi \sigma_g / \sqrt{3}}} = \sqrt[3]{\frac{16 \sqrt{3} n P}{\omega \pi \sigma_{et}}} = 0.54 \text{ m}$$

Problème 2

1. Schéma et contrainte interne. Paroi mince = état biaxial, avec Contrainte radiale $\sigma_R \approx 0$

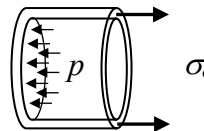
Contrainte tangentielle

$$\sigma_t = \frac{p R}{e}$$



Contrainte axiale

$$\sigma_e = \frac{p \pi R^2}{2 \pi R e} = \frac{p R}{2 e}$$



Contrainte radiale $\sigma_r \ll \sigma_e$ et σ_t

2. Critère de Mohr-Coulomb : Le coefficient de sécurité est donné par la formule

$$n = \frac{\sigma_{et}}{\sigma_1 - \alpha \sigma_3} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{\sigma_{et}}{\sigma_{ec}}$$

1. Contrainte principale avec pression intérieur

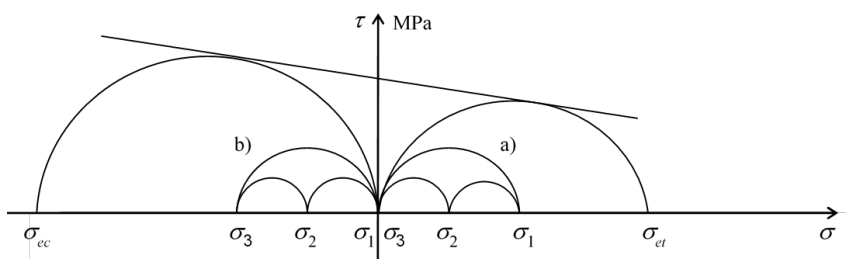
$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_t = \frac{pR}{e} \\ \sigma_2 &= \sigma_e = \frac{pR}{2e} \\ \sigma_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{\sigma_{et}}{\sigma_1} \quad \rightarrow \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_{et}}{n} = 66.6 \text{ MPa} \\ e &= \frac{pR}{\sigma_1} = 1.5 \text{ cm} \end{aligned}$$

2. Contrainte principale avec pression extérieure ($\sigma_1 = 0$)

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= 0 \\ \sigma_2 &= \sigma_e = -\frac{pR}{2e} \\ \sigma_3 &= -\frac{pR}{e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \frac{\sigma_{et}}{\alpha \sigma_3} \quad \rightarrow \quad -\sigma_3 = \frac{\sigma_{et}}{\alpha n} = 100 \text{ MPa} \\ e &= -\frac{pR}{\sigma_3} = 1 \text{ cm} \end{aligned}$$



3. Critère de von Mises (ou plus grand travail de distorsion) : Le coefficient de sécurité est donné par les relations

$$n = \frac{\sigma_{et}}{\sigma_g}$$

Il n'y a ici pas de distinction entre les cas a) et b).

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 0 \\ \sigma_2 &= \sigma_e = -\frac{pR}{2e} \\ \sigma_3 &= -\frac{pR}{e}\end{aligned}$$

$$\sigma_g = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{pR}{e} = \frac{\sqrt{3}}{2} \sigma_1$$

$$\sigma_g = \frac{\sigma_{et}}{n} = 66,6 \text{ MPa}$$

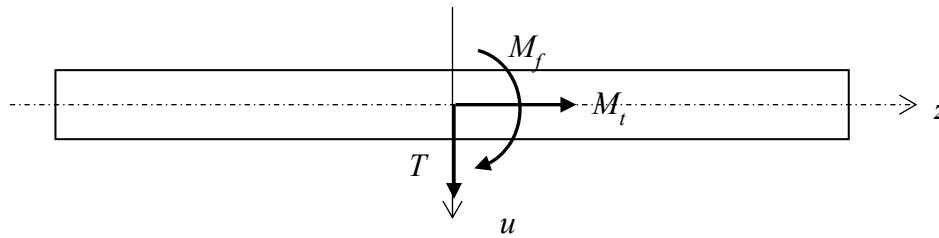
Et par conséquent

$$\sigma_1 = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_g = 76,9 \text{ MPa}$$

$$e = \frac{pR}{\sigma_1} = 1,3 \text{ cm}$$

Problème 3

1. Schéma



2. Contraintes associées en un point M_0 de l'axe u de la section, dues aux efforts intérieurs et orientations

Effet de la flexion M_f :

$$\sigma_x = \frac{M_f}{I} u$$

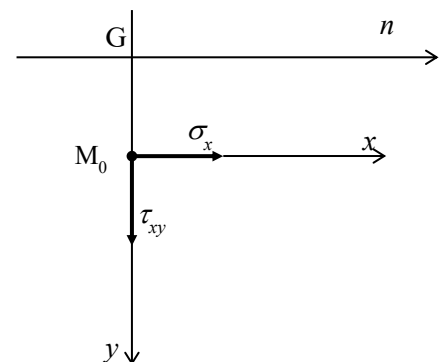
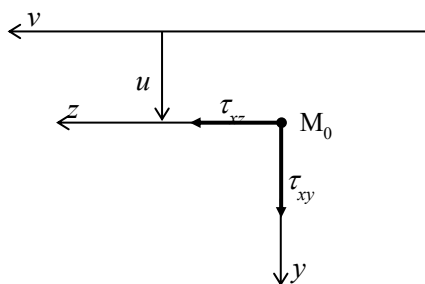
Effet de la torsion M_t :

$$\tau_{xz} = -\frac{M_t}{I_p} u$$

Effet de l'effort tranchant T :

$$\tau_{xy} = \frac{4T}{3F} \left[1 - \left(\frac{u}{D/2} \right)^2 \right] \text{ (voir notes de cours problème 6.2, ou p. 90 du livre de Del Pedro, ou la fin de ce corrigé)}$$

Sens positifs conventionnels des contraintes



3. Matrices des contraintes

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour Tresca, il nous faut connaître les Contraintes principales

$$\det(\Gamma - \sigma_k I) = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_k & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & -\sigma_k & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & -\sigma_k \end{vmatrix} = 0$$

Soit

$$(\sigma_x - \sigma_k)\sigma_k^2 + \tau_{xz}^2\sigma_k + \tau_{xy}^2\sigma_k = 0$$

En posant $\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 = \tau^2$ et $\sigma_x = \sigma$ on obtient l'équation : $\sigma_k(\sigma_k^2 - \sigma\sigma_k - \tau^2) = 0$ dont les racines sont:

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2})$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2})$$

4. Critère de Tresca (critère du plus grand cisaillement)

$$n = \frac{\tau_e}{\tau_{13}}$$

Avec

$$\tau_{13} = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

$$n = \frac{2\tau_e}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}}$$

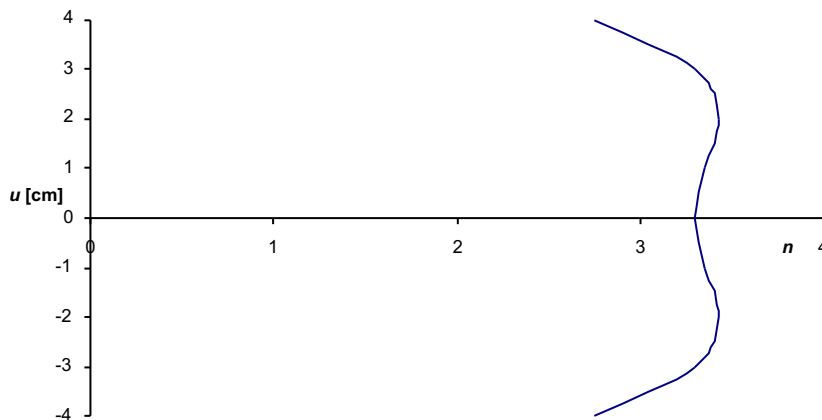
5. Application numérique :

$$D = 8 \text{ cm} \Rightarrow \begin{cases} I = \frac{\pi D^4}{64} = 200 \text{ cm}^4 \\ I_p = 2I = 400 \text{ cm}^4 \\ F = \frac{\pi D^2}{4} = 50 \text{ cm}^2 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \sigma_x = 2500u \text{ [MPa]} \\ \tau_{xz} = -1000u \text{ [MPa]} \\ \tau_{xy} = 53 \left(1 - \left(\frac{u^2}{16 \cdot 10^{-4}} \right) \right) \text{ [MPa]} \end{cases}$$

Et le coefficient de sécurité $n(u)$ vaut :

$$n(u) = \frac{350}{\sqrt{(2500)^2 u^2 + 4 \left[(1000)^2 u^2 + (53)^2 \left(1 - \frac{u^2}{16 \cdot 10^{-4}} \right)^2 \right]}}$$

Cette fonction est paire et présente l'allure ci-dessus



u [m]	n
0	3,3
0,01	3,35
0,02	3,43
0,03	3,3
0,04	2,75

La valeur minimum de n apparaît aux fibres extrêmes de la section, ce qui met en évidence le rôle prépondérant de la contrainte normale de flexion σ_x et de la contrainte tangentielle de torsion τ_{xz} par rapport à la contrainte τ_{xy} due à l'effort tranchant. Cette contrainte, maximum au centre, y provoque cependant un minimum local du coefficient de réduction. Dans cette étude, il resterait encore à démontrer que l'état de contrainte le plus sévère règne bien sur l'axe u (pour $v = 0$).

Calcul du moment statique de la section partielle circulaire

$$y = R \sin(\varphi)$$

$$z = R \cos(\varphi)$$

L'aire de la portion dF

$$dF' = 2z \cdot dy$$

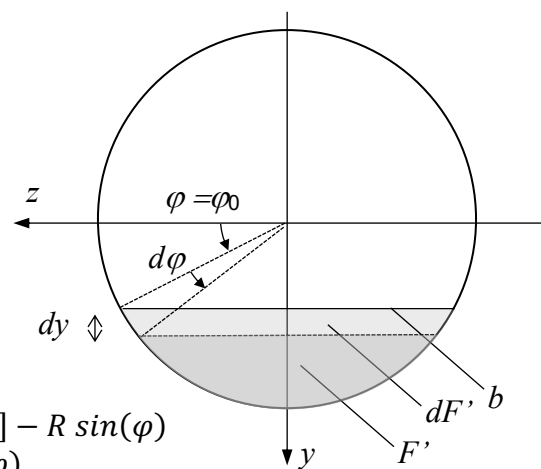
Avec

$$dy = R \sin(\varphi + d\varphi) - R \sin(\varphi)$$

$$= R [\sin(\varphi)\cos(d\varphi) + \cos(\varphi)\sin(d\varphi)] - R \sin(\varphi)$$

$$= R [\sin(\varphi) \cdot 1 + \cos(\varphi)d\varphi] - R \sin(\varphi)$$

$$= R \cos(\varphi)d\varphi$$



Le moment statique est donné par

$$S' = \iint_{F'} y dF' = 2R^3 \int_{\varphi_0}^{\pi/2} \sin(\varphi)\cos^2(\varphi) d\varphi = \frac{2}{3}R^3 \cos^3(\varphi_0)$$

Et la donc la contrainte de cisaillement

$$\tau_{xy} = \frac{TS'}{Ib} = \frac{4}{3} \frac{T}{\pi R^2} \cos^2(\varphi_0) = \frac{4T}{3F} \left[1 - \left(\frac{y=u}{R} \right)^2 \right]$$

Comme : $u^2 = y^2 = R^2 \sin^2(\varphi_0) = R^2(1 - \cos^2(\varphi_0)) \rightarrow \cos^2(\varphi_0) = 1 - \left(\frac{u}{R} \right)^2$